対称性の自発的破れを超えた熱的相

有限温度における対称性を超えた相の分類

渡辺悠樹
香港科技大学 物理学科・高等研究院 (IAS)

共同研究者: Sena Watanabe, Yukitoshi Motome（東京大学）; Shunsuke Sengoku, Weiguang Cao, Guanxi Xun（HKUST）

本講演の基になる論文

I. S. Watanabe, Y. Motome, H. Watanabe, PRB 114, 094108 (2026); PRL in print (arXiv:2603.03852); PRX 16, 041016 (2026); JPSJ 95, 085002 (2026)

II. H. Watanabe, arXiv:2607.00134

III. S. Sengoku, W. Cao, H. Watanabe, arXiv:2610.27938; G. Xun, W. Cao, H. Watanabe, arXiv:2610.27939

二つの相を区別するものは何か

$T = 0$ **では**: 分類は対称性を超える

- 内在的トポロジカル秩序
- 対称性に保護されたトポロジカル相
- 量子化された応答

$T > 0$ **では**: ランダウのパラダイム

- 相 $\leftrightarrow$ 自発的対称性の破れのパターン
- 局所的な秩序変数
- 同じ対称性 $\Rightarrow$ つなげられる？

$T > 0$ のギブス状態 $\rho = e^{-\beta H}/Z$ に，**対称性の破れを超えた**分類はあるか？

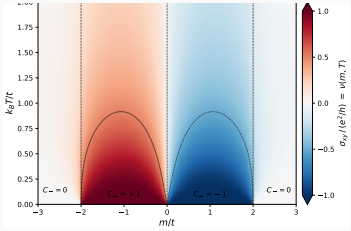
Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 7, 19 (1937); Wen, Int. J. Mod. Phys. B 4, 239 (1990); Kitaev, Ann. Phys. 303, 2 (2003); Chen, Gu, Liu, Wen, PRB 87, 155114 (2013)

例：$T > 0$ のチャーン絶縁体ではトポロジカルな区別が失われる

Qi–Wu–Zhang 模型（正方格子, 各サイトに 2 軌道）：$h_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{k}} = (\sin k_x,\ \sin k_y,\ m - \cos k_x - \cos k_y)$

$\sigma_{xy}(T) = \frac{e^2}{\hbar A} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_n f(\epsilon_{n\boldsymbol{k}})\, \Omega_n(\boldsymbol{k})$, $\quad \Omega_n(\boldsymbol{k}) = -2\,\mathrm{Im}\langle \partial_{k_x} u_{n\boldsymbol{k}} | \partial_{k_y} u_{n\boldsymbol{k}} \rangle$ （久保公式；f はフェルミ分布）

- $T \to 0$：$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} C_-$, $0 < |m| < 2$ で $C_- = -\,\mathrm{sgn}(m)$, $|m| > 2$ で $C_- = 0$：ギャップの閉じる線で隔てられた別々の相
- $T > 0$：σ_{xy} は量子化されず，自由エネルギーは m について解析的：チャーン絶縁体と自明な絶縁体は**つながる**
- オンサイト対称性で保護された SPT 秩序も $T > 0$ では存続できない；1-形式対称性なら存続しうる

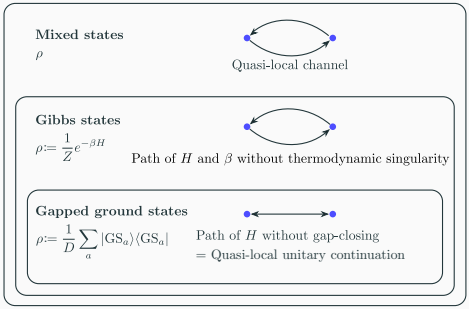


$\nu(m, T) = \sigma_{xy}(T)/(e^2/h)$（$\mu = 0$）；破線は $T = 0$ のギャップ閉塞

基底状態のトポロジカル不変量は熱的状態を区別しない。
目標：$T > 0$ のギブス状態の相を区別するトポロジカル不変量を見つけること。

混合状態にとって「同じ相」とは何か

- ギャップのある基底状態：局所ユニタリ／準断熱接続
- 一般の混合状態：**双方向の局所量子チャネル** — $\rho \sim \sigma$ とは，積状態の補助系と因果半径 $o(L)$ の局所チャネルが $\rho \to \sigma$ **かつ** $\sigma \to \rho$ をトレースノルム誤差 $\to 0$ で実現すること
- ギブス状態：熱力学的特異点のない経路



混合状態の相の分類はまだ**発展途上**で，定義には諸説ある。双方向局所チャネルによる定義と自由エネルギーの解析性による定義が同じ相を与えるかどうかも**示されていない**。

Hastings & Wen, PRB 72, 045141 (2005); Chen, Gu, Wen, PRB 82, 155138 (2010); Coser & Pérez-García, Quantum 3, 174 (2019); Sang, Zou, Hsieh, PRX 14, 031044 (2024)

講演の構成

I. 水の相。氷 VII・VIII・X とスピンアイス：対称性で十分な例
モノポールがループを開く $\Rightarrow$ クロスオーバー

II. 磁場中の 3 次元トリックコード。対称性を超えた熱的相
閉じたフラックスループ $\Rightarrow$ 双方向局所チャネルによる相の不変量 $\mathcal{F}$

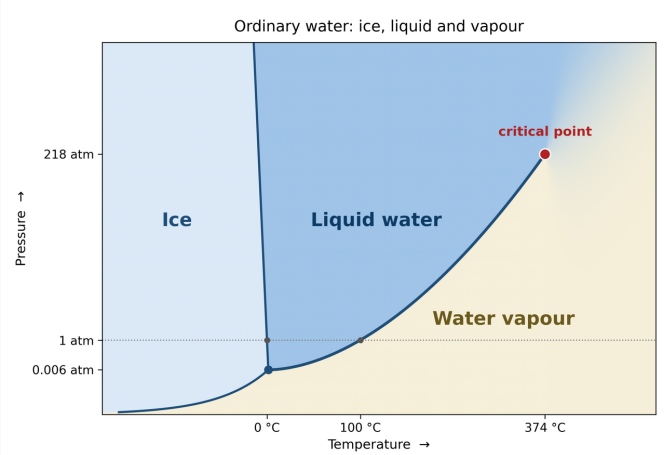
III. m-セル上の古典 $\mathbb{Z}_2$ 模型。一般の (d, m) での安定性定理
対称性の保護なしの自由エネルギー解析性と局所チャネル同値

第一部：水の相 ── 対称性で十分な世界

最初に習う相図

- 氷，液体の水，水蒸気
- 液体 – 気体の境界線は臨界点（374 °C, 218 atm）で**終わる**
- その先では液体と気体は**連続的に**移り変わる

液体の水と水蒸気は**一つ**の熱力学的相である。



なぜ液体 – 気体線は終われて，融解線は終われないのか

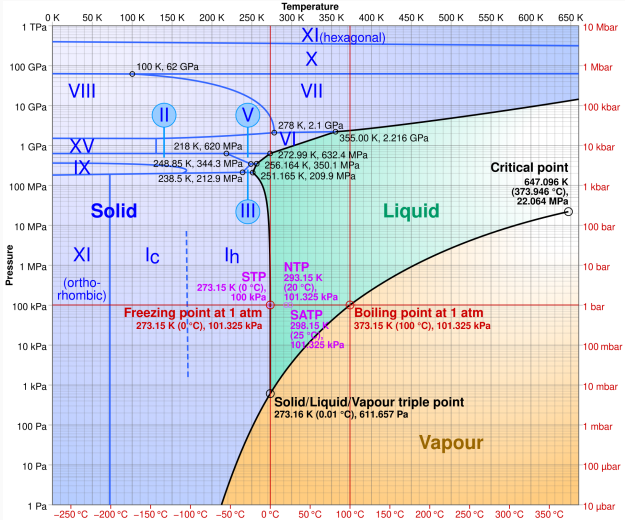
	破れている対称性	局所秩序変数
気体	なし	—
液体	なし	—
氷	並進，回転	結晶の密度波

- **同じ**対称性をもつ二つの状態は，特異点なしにつながり得る
- **異なる**対称性をもつ二つの状態は，必ず相境界で隔てられる

ランダウ – ギンツブルグ：$T > 0$ の相は**自発的対称性の破れ**で分類される。これは完全か？

Landau (1937); Anderson, *Basic Notions of Condensed Matter Physics* (1984)

水の相図



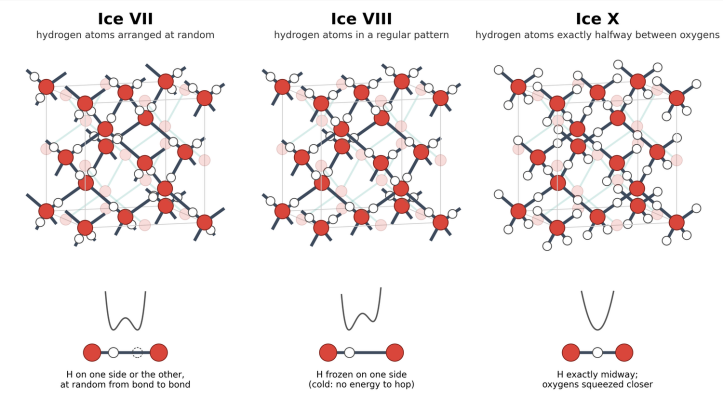
Cmglee, “Phase diagram of water,” Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0 (log–lin chart, 1 Pa–1 TPa, 0–660 K; data compiled from Chaplin, *Water Structure and Science*, lsbu.ac.uk/water)

氷の世界：20 を超える結晶相

- 氷 I_h, I_c, II, III, ..., XX：負圧から > 100 GPa まで
- ほぼすべてが**空間群**で区別できる $\Rightarrow$ ランダウの分類が適用できる
- 例外：同じ空間群をもつ組．例えば**氷 VII と氷 X**（$Pn\bar{3}m$），氷 III と IX（$P4_12_12$）

氷 VII と氷 X は別の相か，それとも同じ相の別の領域か？

高密度氷：一つの酸素骨格，三通りの水素配置



- **VII**：各結合の二つの非中心サイトにプロトンが無秩序に分布（アイスルール）— $Pn\bar{3}m$
- **VIII**：プロトンが秩序化，反強誘電 — $I4_1/amd$，立方対称性が破れる
- **X**：プロトンが結合の中点に — $Pn\bar{3}m$，**VII と同じ空間群**

Kuhs *et al.*, J. Chem. Phys. 81, 3612 (1984); Hemley *et al.*, Nature 330, 737 (1987); Holzapfel, J. Chem. Phys. 56, 712 (1972)

実験は何を語るか

低温：VIII $\to$ X は一次転移（ヒステリシス）

室温：VII $\to$ X は幅広く連続的な領域

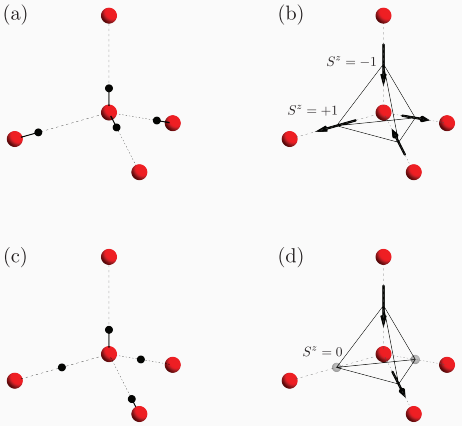
- 赤外・ラマン分光
- 高圧 NMR
- その場中性子回折：水素結合の対称化

熱力学モデル：VII–X の一次転移線が VIII 領域の内側に隠れた臨界点で終わる

VII と X を区別する対称性はない。
$T > 0$ での鋭い境界があるなら，それは**トポロジカル**でなければならない。

Hirsch & Holzapfel (1986); Goncharov *et al.*, Science 273, 218 (1996); Meier *et al.* (2018); Komatsu *et al.*, Nat. Commun. 15, 5100 (2024); Ackland *et al.*, PRB 112, 094116 (2025)

プロトンからスピンへ：スピン 1 パイロクロア磁性体



- O–O 結合の中点は**パイロクロア格子**をなす
- プロトンが A 寄り／中点／ B 寄り
  $\Longleftrightarrow \quad S^z_\ell = -1, 0, +1$
- アイスルール $\Longleftrightarrow$ “two-in, two-out”
- アイスルールの破れ（H_3O^+, OH^-）
  $\Longleftrightarrow$ **磁気モノポール**

高密度氷 = 古典**スピン 1 スピンアイス**

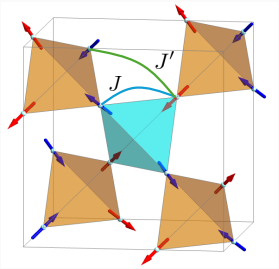
Harris *et al.*, PRL 79, 2554 (1997); Bramwell & Gingras, Science 294, 1495 (2001); Castelnovo, Moessner, Sondhi, Nature 451, 42 (2008); Pandey & Damle, arXiv:2512.11623

有効模型

$$H = J\sum_{\langle \ell\ell' \rangle} S^z_\ell S^z_{\ell'} + J'\sum_{\{\ell\ell'\}} S^z_\ell S^z_{\ell'} + \Delta \sum_\ell (S^z_\ell)^2$$

$J' = 0,\ \Delta = J + \mu$ のとき：

$$H = \frac{J}{2}\sum_{\mathbf{r}} \Big(\sum_{\ell \in \mathbf{r}} S^z_\ell \Big)^2 + \mu \sum_\ell (S^z_\ell)^2$$



- Δ：非中心プロトンのコスト $\to$ 氷 X へ駆動
- $J' > 0$：分極状態を選ぶ $\to$ 氷 VIII
- モノポール電荷 $Q_{\mathbf{r}} = \nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\mathbf{r}} \coloneqq \pm\sum_{\ell\in\mathbf{r}} S^z_\ell$（ダイヤモンド格子の A サイトで $+$, B サイトで $-$）のコストは $\frac{J}{2}Q^2$

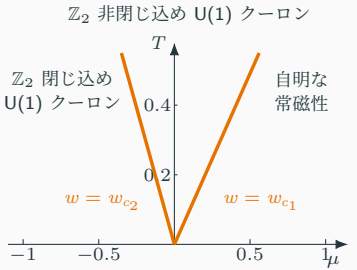
$w \coloneqq e^{-\mu/T}$（スピン ±1 対 0），$v \coloneqq e^{-J/2T}$（**モノポール**）：

$$Z = \sum_{\{S^z_\ell\}} e^{-\beta H} = \sum_{\{Q_{\mathbf{r}}\}} \sum_{\{S^z_\ell\}} \prod_{\mathbf{r}} \delta_{\nabla\cdot\boldsymbol{s}_{\mathbf{r}},\, Q_{\mathbf{r}}}\ v^{\sum_{\mathbf{r}} Q^2_{\mathbf{r}}}\ w^{\sum_\ell (S^z_\ell)^2}$$

モノポールなしの極限 $v = 0$：対称性の破れのない三つの相

$\boldsymbol{P} := \frac{1}{L}\sum_{\ell=\langle \mathbf{r}_A \mathbf{r}_B\rangle} (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)\, S^z_\ell$　（面を横切る S^z の正味フラックス；$v = 0$ のアイス則 $\Rightarrow \boldsymbol{P} \in \mathbb{Z}^3$）

	$w < w_{c_1}$ 自明な常磁性	$w_{c_1} < w < w_{c_2}$ $\mathbb{Z}_2$ 非閉じ込め	$w > w_{c_2}$ $\mathbb{Z}_2$ 閉じ込め
氷	**氷 X**	—	**氷 VII**
創発光子	ギャップあり	ギャップレス	ギャップレス
フラックスセクター $\boldsymbol{P}$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{Z}^3$	$(2\mathbb{Z})^3$
最小の自由電荷	—	$Q = 1$	$Q = 2$
転移	w_{c_1}：3D XY	w_{c_2}：3D Ising	



$v = 0$ の境界（Pandey & Damle）：

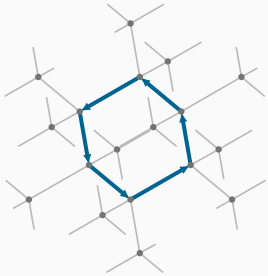
$w = e^{-\mu/T} = w_c$，すなわち $\mu = -T \ln w_c$

$v = 0$ では，氷 VII と氷 X は二つのトポロジカル転移で隔てられた**別の相**である。

双対性 I（小さい w）：有向スピンループ $\Rightarrow$ 3D XY 模型

$S^z = \pm 1$ のリンクは $S^z = 0$ の背景中の単位電流。$v = 0$ のガウス則 $\Rightarrow$ **有向の閉じたループ**。各サイトの拘束を $\delta_{\nabla\cdot \boldsymbol{S}_{\mathbf{r}},0} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_{\mathbf{r}}}{2\pi}\, e^{-i\theta_{\mathbf{r}}\nabla\cdot \boldsymbol{S}_{\mathbf{r}}}$ と書くと：

$$
\begin{aligned}
Z_{v=0} &= \textstyle\sum_{\{S^z_\ell\}} \prod_{\mathbf{r}} \delta_{\nabla\cdot \boldsymbol{S}_{\mathbf{r}},\,0}\; w^{\sum_\ell (S^z_\ell)^2} \\
&= \textstyle\int \mathcal{D}\theta \sum_{\{S^z_\ell\}} e^{-i\sum_{\mathbf{r}} \theta_{\mathbf{r}} \nabla\cdot \boldsymbol{S}_{\mathbf{r}}}\; w^{\sum_\ell (S^z_\ell)^2} \\
&= \textstyle\int \mathcal{D}\theta \prod_\ell \left[\sum_{S^z_\ell = 0,\pm 1} w^{(S^z_\ell)^2}\, e^{i S^z_\ell \nabla\theta_\ell} \right] \\
&= \textstyle\int \mathcal{D}\theta \prod_\ell \left[1 + 2w \cos\nabla\theta_\ell \right] \approx \int \mathcal{D}\theta\; e^{2w\sum_\ell \cos\nabla\theta_\ell},
\end{aligned}
$$



$\nabla\theta_\ell = \theta_{\mathbf{r}_B} - \theta_{\mathbf{r}_A}$ ($\sum_{\mathbf{r}} \theta_{\mathbf{r}} \nabla\cdot \boldsymbol{S}_{\mathbf{r}} = -\sum_\ell S^z_\ell \nabla\theta_\ell$)：3D XY 模型，$K = 2w$。

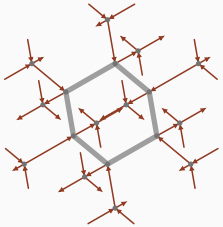
T_c^{XY}（ダイヤモンド）$= 1.30036(1) \Rightarrow w_{c_1} \simeq 0.385$　（MC: 0.3609）

w_{c_1} でのループ増殖 $=$ 双対 XY 模型の秩序化，$\langle e^{i\theta} \rangle \neq 0$

José, Kadanoff, Kirkpatrick, Nelson, PRB 16, 1217 (1977); Savit, Rev. Mod. Phys. 52, 453 (1980); S. Watanabe, Motome, H. Watanabe, J. Phys. Soc. Jpn. 95, 085002 (2026); PRL in print (arXiv:2603.03852)

双対性 II（大きい w）：空孔ループ $\Rightarrow$ 3D Ising 模型

$S^z = 0$ のリンクは $S^z = \pm 1$ のアイス背景中の無向な空孔。$v = 0$ では各サイトで偶数本 $\Rightarrow$ **無向の閉じたループ** C（背景のアイス則配位の数を $W(C)$ とする）。



$$Z_{v=0} = \sum_{\{S^z_\ell\}} \prod_{\boldsymbol{r}} \delta_{\nabla\cdot \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{r}},\,0}\; w^{\sum_\ell (S^z_\ell)^2} = \sum_C w^{2N-|C|}\, W(C)$$

$$= w^{2N}\, W(\emptyset) \sum_C \frac{W(C)}{W(\emptyset)}\, w^{-|C|} \overset{\text{Pauling}}{\approx} w^{2N}\, W(\emptyset) \sum_C \left(\tfrac{2}{3w}\right)^{|C|}$$

Pauling 近似：$W(\emptyset) \approx 2^{2N}(3/8)^N$，$W(C) \approx 2^{2N-|C|}(3/8)^{N-|C|}(1/2)^{|C|} \Rightarrow W(C)/W(\emptyset) \approx (2/3)^{|C|}$。

ダイヤモンド格子上の **3D Ising 模型の高温展開**と比べる：

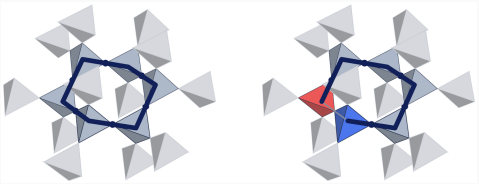
$$Z_{\text{Ising}} = \sum_{\{\sigma_{\boldsymbol{r}}\}} \prod_{\langle \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'\rangle} e^{K\sigma_{\boldsymbol{r}}\sigma_{\boldsymbol{r}'}} = \sum_{\{\sigma_{\boldsymbol{r}}\}} \prod_{\langle \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'\rangle} \left(\cosh K + \sigma_{\boldsymbol{r}}\sigma_{\boldsymbol{r}'} \sinh K\right) = (\cosh K)^{2N}\, 2^N \sum_C (\tanh K)^{|C|}$$

ダイヤモンド格子の Ising 臨界結合 $K_c \simeq 0.3698 \Rightarrow w_{c_2} \simeq 1.884$　（MC: 1.8904）

> w_{c_2} でのループ増殖 $=$ 双対 Ising 模型の秩序化，$\langle \sigma_{\boldsymbol{r}} \rangle \neq 0$

Wegner (1971); Nahum *et al.*, PRL 107, 110601 (2011); Deng & Blöte, PRE 68, 036125 (2003); キタエフ模型の 3D トリックコード極限でのループ偶奇: Nasu *et al.*, PRB 89, 115125 (2014)

有限温度：熱的モノポールがループを開く



XY 描像（小さい w）

$$Z \approx \int \mathcal{D}\theta \, e^{2w \sum_\ell \cos \nabla\theta_\ell \, + \, 2v \sum_{\mathbf{r}} \cos \theta_{\mathbf{r}}}$$

双対 XY スピンに一様磁場 $h = 2v$

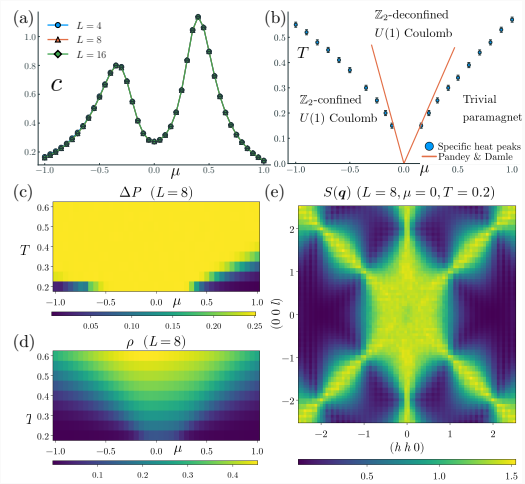
Ising 描像（大きい w）

$$Z \approx \sum_{\{\sigma_{\mathbf{r}}\}} e^{K \sum_{\langle \mathbf{r}\mathbf{r}' \rangle} \sigma_{\mathbf{r}} \sigma_{\mathbf{r}'} + h \sum_{\mathbf{r}} \sigma_{\mathbf{r}}}$$

磁場中の Ising 模型，$\tanh K = 2/(3w)$,
$\tanh h = \sqrt{3}\, v$：モノポールのフガシティが磁場

熱的モノポール $=$ 双対理論における**対称性を破る場**：任意の $T > 0$ で，すべての連続転移は**クロスオーバー**になる（この場は relevant，$y_h > 0$）。

モンテカルロ：丸まったピーク，量子化されないフラックス



(a) 比熱：$L = 4, 8, 16$ が一致，発散なし

(b) ピーク位置は $v = 0$ の境界からずれる：**クロスオーバー図**

(c) 大域フラックス $\boldsymbol{P}$ が整数値から漏れる

(d) モノポール密度は有限

(e) 低温ではピンチポイントが残る（長い遮蔽長）

$T > 0$ では，$v = 0$ 模型のトポロジカルな区別は消える。

氷に戻る：J' と熱的モノポールを含む完全な模型

パイロクロア格子上のスピン 1 Blume–Capel 模型の古典モンテカルロ（$N = 16L^3$ サイト，$J = 1$）

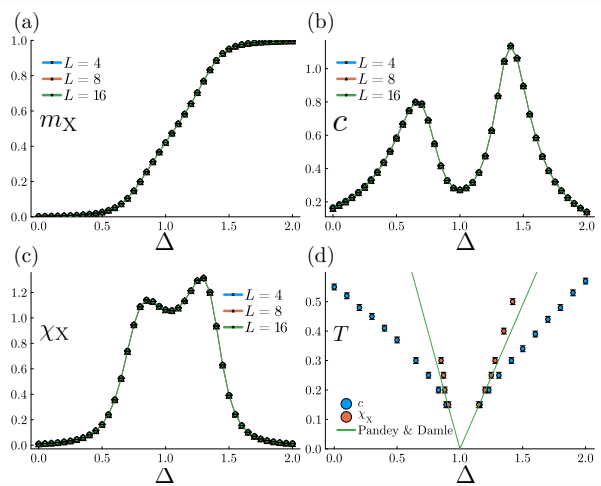
- 熱浴法 + ショートループ更新，Δ に関するレプリカ交換
- 氷 X の指標：$m_{\mathrm{X}} = 1 - \frac{1}{N}\sum_{\ell}\langle (S_\ell^z)^2\rangle$
- 氷 VIII の秩序変数：$m_{\mathrm{VIII}} = \langle \boldsymbol{M}^2\rangle$（分極）
- 比熱 c と帯磁率 χ_{X}

検証：VII と X の間で自由エネルギーの二階微分が発散するか？

氷 VII → 氷 X はクロスオーバー

- m_{X} は Δ とともに滑らかに増加（$T = 0.3$）
- c と χ_{X} のピークは**飽和**：$L = 4, 8, 16$ が一致
- c と χ_{X} のピーク位置は**一致せず**，
  $v = 0$ の境界からもずれる
- 唯一の特異点は $\Delta = J$ での $T = 0$ の準位交差

任意の $T > 0$ で，VII と X の間
に熱力学的特異点はない。

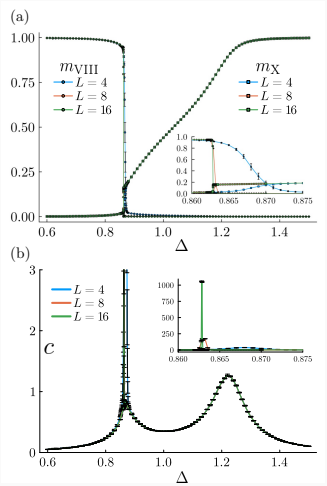


氷 VIII は真の一次転移で囲まれている

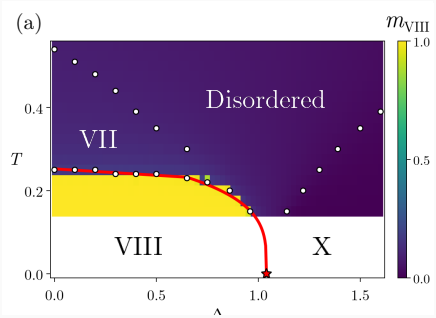
$J' = 0.02,\ T = 0.2$：

- m_{VIII} は $\Delta \simeq 0.86$ で不連続に落ちる
- 比熱ピークは $\propto L^3$ で成長：一次転移
- m_{X} は跳ぶが飽和しない：VIII $\to$ 無秩序 $\to$ X
- VIII は立方対称性を破る（一軸方向の分極）：
  対称性に保護された境界

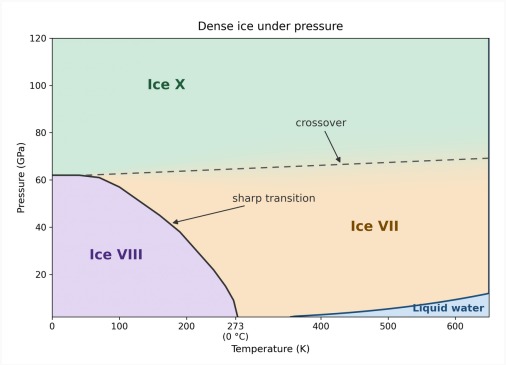
対称性の破れ $\Rightarrow$ 鋭い境界。
対称性の破れなし $\Rightarrow$ クロスオーバー。



高密度氷の相図



模型（m_{VIII}），$J' = 0.02$

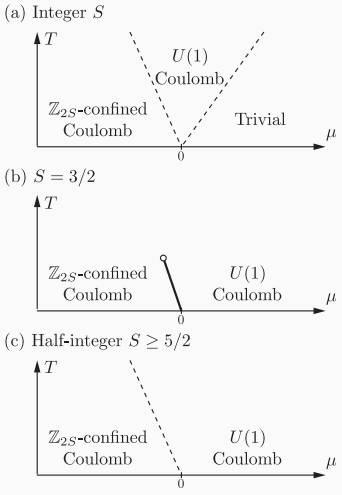


模式図

氷 VIII：一次転移線。氷 VII と氷 X：無秩序領域を通るクロスオーバーでつながった一つの相。室温実験と整合する。

S. Watanabe, Motome, H. Watanabe, PRB 114, 094108 (2026); Goncharov *et al.* (1996); Komatsu *et al.* (2024); Ackland *et al.*, PRB 112, 094116 (2025)

任意のスピン S：どの転移がモノポールに耐えるか



モノポールなし極限（μ/T を固定して $T/J \to 0$：原点から出る半直線）

- 整数 S：自明相 $\to$ U(1) クーロン（3D XY）$\to \mathbb{Z}_{2S}$ 閉じ込めクーロン，フラックスは $2S$ の倍数に量子化
- 半整数 S：自明相はない；$S = \frac{3}{2}$ は 3 状態 Potts 模型に写り $\Rightarrow$ **一次転移**；$S \geq \frac{5}{2}$：3D XY

有限温度：熱的モノポールはストリングの端点で，すべての S に対し場 $h_{\mathrm{eff}} \simeq \sqrt{3}\,v$ として働く

- 連続転移はクロスオーバーの尾根（破線）になる
- $S = \frac{3}{2}$ の一次転移線は共存線（実線）として生き残り，外部磁場ゼロで**臨界終点**（白丸）に至る

液体 – 気体と同様：一次転移線は弱い場に耐えるが，連続転移は耐えられない。

S. Watanabe, Motome, H. Watanabe, "Topological phase transitions and their thermodynamic fate in arbitrary-S classical pyrochlore spin ice," Phys. Rev. X 16, 041016 (2026); モノポールなしの $S = 3/2$: Pandey, Kundu, Damle, arXiv:2602.23041

第一部のまとめ

- 液体の水と水蒸気：一つの相。氷 VII と氷 X：$T > 0$ では一つの相。
- $v = 0$ のトポロジカル転移は実在するが，**点状のモノポールがループを開き**，双対理論の対称性を破る場として働く $\Rightarrow$ クロスオーバー。
- 氷 VIII は破れた対称性に保護され，その境界は鋭い。一般の S では $S = \frac{3}{2}$ の一次転移線だけが生き残り，臨界終点で終わる。

水については，自発的対称性の破れによる分類は**完全**である：対称性が二つの状態を区別できない所では，必ず連続的な経路がそれらをつないでいた。

対称性を超えるには，**切れない**欠陥が必要である。$\Rightarrow$ 第二部

第二部：磁場中の 3 次元トリックコード ── 対称性を超えた熱的相

開いたループ対閉じたループ：原理

スピンアイス／高密度氷

アイスルールは**エネルギー的**，コスト $\frac{J}{2}Q^2$

熱的モノポールがループを切る

$\Rightarrow$ relevant な双対秩序化場

$\Rightarrow$ 転移は**クロスオーバー**になる

3 次元トリックコード／$\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論

ビアンキ恒等式 $\prod_{p\subset\partial c} B_p = \mathbf{1}$

フラックスループは**すべての** T **で**閉じている

$\Rightarrow$ 線張力対エントロピー

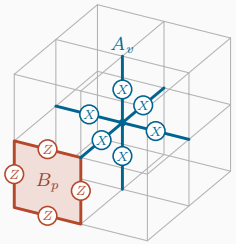
$\Rightarrow$ 熱的転移は**生き残る**

欠陥ループが切れるかどうかが，対称性の破れなしの熱的転移が存在できるかを決める。
氷では切れる。3 次元トリックコードでは切れない — 微視的対称性をすべて破っても。

Castelnovo & Chamon, PRB 78, 155120 (2008); Nasu *et al.*, PRB 89, 115125 (2014); Fradkin & Shenker, PRD 19, 3682 (1979);
S. Watanabe, Motome, H. Watanabe, PRL in print (arXiv:2603.03852)

模型：両方の磁場を含む 3 次元トリックコード

$$H = -J_e \sum_v A_v - J_m \sum_p B_p - h_x \sum_\ell X_\ell - h_z \sum_\ell Z_\ell, \qquad A_v = \prod_{\ell \ni v} X_\ell, \quad B_p = \prod_{\ell \in \partial p} Z_\ell$$



立方格子のリンク上の量子ビット

$J_e = J_m = 1$；二つの磁場：

- h_z は電気的 1-form 対称性 $U_e(\Sigma^*) = \prod_{\ell \perp \Sigma^*} X_\ell$ を破る
- h_x は磁気的 2-form 対称性 $U_m(C) = \prod_{\ell \in C} Z_\ell$ を破る
- 両方の磁場：**微視的な高次対称性は何も残らない**

既知の極限：

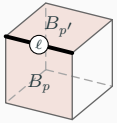
- $h = 0$：熱的転移 $T_c^{(0)} \simeq 1.3133$（3D Ising）；TEE $= 2\ln 2$（$T = 0$），$\ln 2$（$0 < T < T_c^{(0)}$），0（$T > T_c^{(0)}$）
- $T = 0$：$h_x = 1$ で一次転移；$h_z \simeq 0.194$ で連続転移

微視的対称性は両方とも明示的に破れている。何かが生き残るとすれば，それは何か？

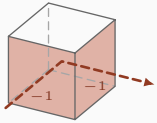
Wegner (1971); Castelnovo & Chamon, PRB 78, 155120 (2008); Reiss & Schmidt, SciPost Phys. 6, 078 (2019); Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett, JHEP 02, 172 (2015); Bravyi, Hastings, Michalakis, J. Math. Phys. 51, 093512 (2010)

生き残るもの：閉じたフラックスの制約

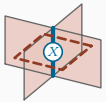
各立方体 c での**ビアンキ恒等式**： $\prod_{p\subset\partial c} B_p = \mathbf{1}$



(a) c の各リンク ℓ はちょうど二つの面 p, p' に属し，$Z_\ell^2 = \mathbf{1}$



(b) よって各立体で $B_p = -1$ の面（陰影）は**偶数**個：フラックス線は途切れない



(c) X_ℓ は ℓ を囲む四つのプラケットを反転：最小のフラックスループ

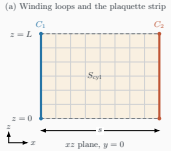
- プラケット欠陥（$B_p = -1$）に端点はない：それらを貫く双対辺は**閉じたフラックスループ**をなす
- **演算子の恒等式**：すべての T，h_x，h_z と任意の摂動のもとで成立 — エネルギー的なアイスルールと違い，端点を作る機構がない
- 低温：ループには張力；高温：ループが増殖

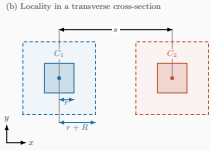
対称性ではなく制約が，明示的な対称性の破れを生き延びる — そしてそれこそが**復号器**の必要とするものである。

復号ウィルソンループ相関 f_W

$$f_W \coloneqq \langle W_1 W_2\rangle_{\mathcal{C}(\rho)} - \langle W_1\rangle_{\mathcal{C}(\rho)}\langle W_2\rangle_{\mathcal{C}(\rho)} = \langle \widetilde{W}_1 \widetilde{W}_2\rangle_\rho - \langle \widetilde{W}_1\rangle_\rho \langle \widetilde{W}_2\rangle_\rho \qquad \widetilde{W}_i \coloneqq \mathcal{C}^\dagger(W_i)$$

- 距離 $s = \lfloor L/2 \rfloor$ の二本の平行な巻き付きループ C_1, C_2；$W_i = \prod_{\ell \in C_i} Z_\ell$，$W_1 W_2 = \prod_{p \in S_{\mathrm{cyl}}} B_p$
- 帯の近くの小さなフラックスループが裸の積の符号を反転させる ⇒ まず**局所的な回復** $\mathcal{C}$ を施す：シンドローム η を測り，深さ $r = \lfloor \sqrt{L} \rfloor \ll s$ の固定された局所復号器が選ぶリンク集合 $\mathcal{R}(\eta)$ を反転する





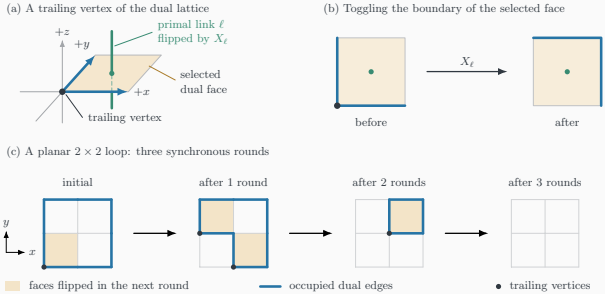
$$\mathcal{C}(\rho) \coloneqq \textstyle\sum_\eta X_{\mathcal{R}(\eta)} P_\eta\, \rho\, P_\eta X_{\mathcal{R}(\eta)}, \qquad P_\eta \coloneqq \prod_p \tfrac{1+\eta_p B_p}{2}, \qquad X_{\mathcal{R}(\eta)} \coloneqq \textstyle\prod_{\ell \in \mathcal{R}(\eta)} X_\ell$$

$$\langle W_i\rangle_{\mathcal{C}(\rho)} = \mathrm{Tr}\left[W_i \textstyle\sum_\eta X_{\mathcal{R}(\eta)} P_\eta\, \rho\, P_\eta X_{\mathcal{R}(\eta)}\right] = \mathrm{Tr}\left[\widetilde{W}_i\, \rho\right] \quad (\text{トレースの巡回性},\ [P_\eta, W_i] = 0)$$

$$\widetilde{W}_i = \mathcal{C}^\dagger(W_i) = \textstyle\sum_\eta P_\eta X_{\mathcal{R}(\eta)} W_i X_{\mathcal{R}(\eta)} P_\eta = W_i \sum_\eta (-1)^{|\mathcal{R}(\eta) \cap C_i|} P_\eta \quad (\ell \in C_i \text{ で } X_\ell W_i X_\ell = -W_i)$$

$\widetilde{W}_i$ は Z 基底で対角 ⇒ $h_x \neq 0$ でも QMC のスナップショットから計算できる。

固定された局所復号器：Sweep



- *trailing* な双対頂点とは，占有された辺が正方向にしかない頂点 ⇒ それらが張る正方形を貫くリンクを反転
- 同期的なラウンド；r ラウンドで辺数 $\leq 2(r+1)$ の孤立成分はすべて消去される
- $w_i(z)$ は C_i から距離 r 以内のスピンにしか依存しない：二つの復号観測量は**互いに素な管**に住む

なぜ連結部分（connected subtraction）が重要か

$$D_{12} \coloneqq \langle \widetilde{W}_1 \widetilde{W}_2 \rangle_\rho, \quad M_i \coloneqq \langle \widetilde{W}_i \rangle_\rho, \quad f_W = D_{12} - M_1 M_2, \quad |f_W| \le \sqrt{(1-M_1^2)(1-M_2^2)} \le 1$$

共有されたランダムな巻き付きビット

$D_{12} = 1,\ M_i = 0 \Rightarrow f_W = 1$
例：正準 $T = 0$ 状態 $P_{0,L}/8$
（8 セクター全部）

分極で固定された場合

$D_{12} = 1,\ M_1 M_2 = 1 \Rightarrow f_W = 0$
例：すべて $Z_\ell = +1$（シンドロームなし，補正なし）

f_W は**局所的に回復可能で，偏りのない，共有された**ビットを検出する — まさに積状態が持ち得ないもの。

定理：$f_W \neq 0$ は局所的な準備を妨げる

障害定理

π を積状態，Φ を積状態の補助系と因果半径 R をもつ局所回路とし，$\sigma = \Phi(\pi)$ とする。$2(R+r) < s$ ならば $f_W(\sigma) = 0$。

証明。 Φ を系＋補助系上のユニタリ U に拡張し，$\Pi = \pi \otimes \pi_{\mathrm{anc}}$ とおく。引き戻した観測量 $O_i = U^\dagger(\widetilde{W}_i \otimes \mathbf{1})U$ は互いに素な半径 $(R+r)$ の管に住むので

$$D_{12}(\sigma) = \mathrm{Tr}(\Pi O_1 O_2) = \mathrm{Tr}(\Pi O_1)\,\mathrm{Tr}(\Pi O_2) = M_1(\sigma) M_2(\sigma). \qquad \square$$

- 近似的な準備：$|f_W(\rho) - f_W(\sigma)| \leq 3\|\rho - \sigma\|_1$
- 時間 $o(L)$ のハミルトニアン／リンドブラッド発展：リープ – ロビンソンの裾 $\Rightarrow f_W \to 0$

$\limsup_L |f_W| > 0 \Rightarrow$ 積状態の自明な相には**属さない**（$T = \infty$ と $h \to \infty$ を含む）。

Lieb & Robinson, CMP 28, 251 (1972); Bravyi, Hastings, Verstraete, PRL 97, 050401 (2006); H. Watanabe, arXiv:2607.00134

チャネル相の不変量：$\mathcal{F}$

固定した復号器は自明な経路に沿って失敗し得る（一様なオンサイト回転 $U(t)$：状態は同じ相に留まるのに $f_W(1/2) = 0$）。そこでループ近傍の二値観測量と物理的な回復操作について，総半径 $\leq \epsilon L$ の範囲で**最適化**する：

$$F_{\epsilon,L}(\rho) \coloneqq \sup_{(W_1,W_2,\mathcal{C})} |f_W(\rho;\mathcal{C})|, \qquad \mathcal{F}(\boldsymbol{\rho}) \coloneqq \lim_{\epsilon\downarrow 0} \limsup_{L\to\infty} F_{\epsilon,L}(\rho_L)$$

相の不変量

$\mathcal{F}$ は積状態の補助系と半径 $o(L)$ をもつ局所チャネルのもとで非増加。したがって $\boldsymbol{\rho} \sim \boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \mathcal{F}(\boldsymbol{\rho}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})$。

- 磁場なしの正準 $T = 0$ 状態では $\mathcal{F} = 1$；すべての積状態では $\mathcal{F} = 0$
- 固定復号器からの下界：$\mathcal{F} \geq \limsup_L |f_W|$，よって $f_W \to 1$ ならば $\mathcal{F} = 1$

$\mathcal{F}$ は双方向局所チャネルで定まる相ごとに一定であり，測定された $f_W \to 1$ から $\mathcal{F} = 1$ が従う。

$\mathcal{F}$ が相の不変量である理由：証明

Φ_L を積状態のアンシラをもつ因果半径 $R_L = o(L)$ の局所回路，$e_L \coloneqq \|\sigma_L - \Phi_L(\rho_L)\|_1 \to 0$ とする。

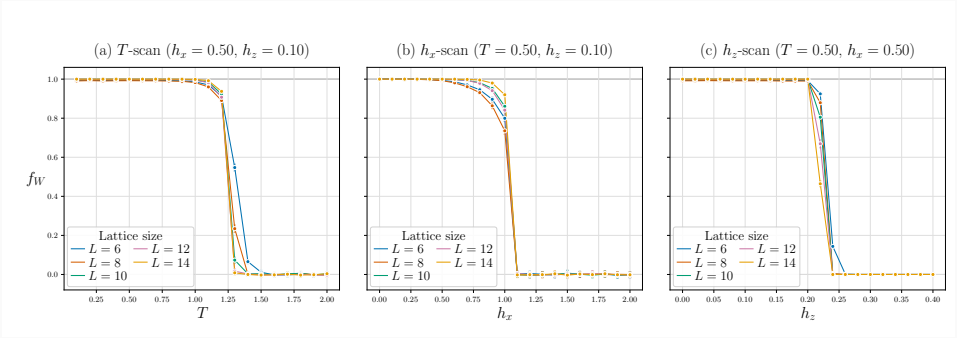
1. **候補を引き戻す。**σ_L に対する任意の許容候補 $(W_1, W_2, \mathcal{C})$ について $f_W\big(\Phi_L(\rho_L); \mathcal{C}\big) = f_W\big(\rho_L; \mathcal{C}\circ\Phi_L\big)$。$\mathcal{C}\circ\Phi_L$ も積状態アンシラをもつ物理的回路で，半径は高々 R_L だけ増える。
2. **変換誤差。**$|f_W(\sigma_L;\mathcal{C}) - f_W(\Phi_L(\rho_L);\mathcal{C})| \le 3e_L$：共分散はトレースノルムに関して安定で，$\mathcal{C}$ は縮小的。
3. **半径の予算。**小さい $\epsilon > 0$ を固定すると，大きい L では $R_L/L < \epsilon$ なので

$$F_{\epsilon,L}(\sigma_L) \le F_{\epsilon + R_L/L,\,L}(\rho_L) + 3e_L \le F_{2\epsilon,L}(\rho_L) + 3e_L.$$

4. **極限。**まず $\limsup_{L\to\infty}$（劣線形な拡大を吸収），次に $\epsilon \downarrow 0$：$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) \le \mathcal{F}(\boldsymbol{\rho})$。逆向きの変換から $\ge$。□

一方向の局所変換は $\mathcal{F}$ を増やせず，双方向の変換は $\mathcal{F}$ を固定する。積状態の入力では $\mathcal{F} = 0$（後方光円錐が交わらない）なので，$\mathcal{F} > 0$ は自明な相を排除する。

量子モンテカルロ：三つの断面に沿った f_W

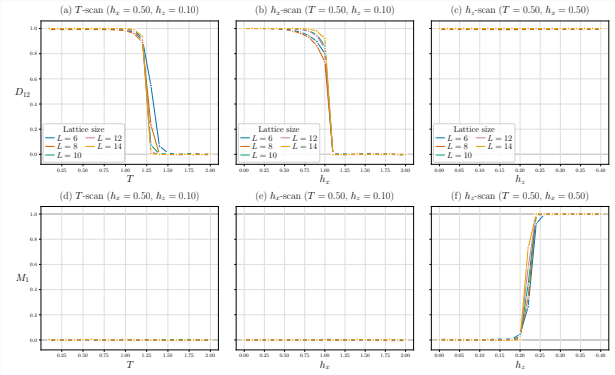


- 連続時間ワールドライン QMC，等時刻 Z スナップショット，$L = 6$–14，Sweep 深さ $r = \lfloor \sqrt{L} \rfloor$
- (a) $(h_x, h_z) = (0.5, 0.1)$ で T を走査；　(b) $(T, h_z) = (0.5, 0.1)$ で h_x；　(c) $(T, h_x) = (0.5, 0.5)$ で h_z

低温・弱磁場では $f_W \simeq 1$；その先では $f_W \to 0$ で，L とともに鋭くなる。

Wu, Deng, Prokof'ev, PRB 85, 195104 (2012); H. Watanabe, arXiv:2607.00134

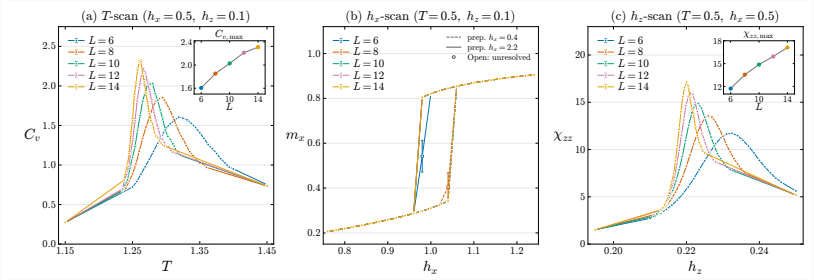
ビットを失う二つの異なる仕方



T と h_x の走査：$M_i \simeq 0$ のまま D_{12} が落ちる $\Rightarrow$ 二つのループの値が一致しなくなる

h_z の走査：$D_{12} \simeq 1$ だが $M_i \to 1 \Rightarrow$ 分極；連結部分を引くことが本質的

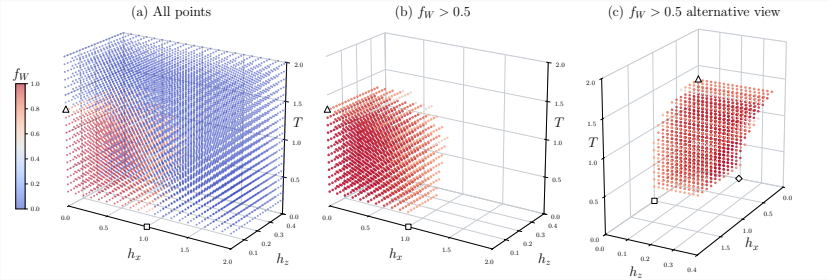
同じ断面での熱力学的な兆候



- (a) 比熱ピークと (c) 縦帯磁率ピークは，f_W が落ちる場所で L とともに成長
- (b) 横分極：f_W の落下近傍で準備依存の枝が現れる

f_W の消失には熱力学的特異点が伴う。

$\mathcal{F} = 1$ の領域



- $L = 8$ での (h_x, h_z, T) 全域探索：8379 点；(b,c) は $f_W > 0.5$ の点
- マーカー：既知の転移点 $(h_x, h_z, T) = (1, 0, 0),\ (0, 0.194, 0),\ (0, 0, 1.3133)$

$T > 0, h_x, h_z > 0$ に広がる $\mathcal{F} = 1$ の領域：**微視的な対称性の破れを超えた**ギブス状態の相。

第二部のまとめ，$\mathcal{F}$ でないもの，そして残る課題

- $\mathcal{F} = 1$ と $\mathcal{F} = 0$ は双方向局所チャネルのもとで**異なる相**；数値計算では，微視的な高次対称性のない (T, h_x, h_z) の有限領域で $f_W \to 1$，したがって $\mathcal{F} = 1$。
- $\mathcal{F}$ は一般に量子化されない（二つの強磁性状態の混合で $\mathcal{F} = 4p(1-p)$），$\mathcal{F} = 0$ は自明性を証明しない，ビットは古典的（三つの論理 Z パリティ）で量子メモリは主張しない。

第二部で未解決	$\Rightarrow$	**第三部**
一つの模型の二つの一様磁場 h_x, h_z のみ；根拠は QMC	$\Rightarrow$	**任意の**弱い局所摂動，任意の (d, m)；定理
熱力学的な連結性：$\mathcal{F} = 1$ の領域の内部で f が正則かは未証明	$\Rightarrow$	低温（と高温）での f の同時解析性
チャネルの連結性：一方向の障害と $\mathcal{F} \geq \limsup \lvert f_W \rvert$ のみ；参照状態への双方向チャネルはない	$\Rightarrow$	$\boldsymbol{\rho}_{\beta,g} \sim_{\mathrm{LC}} \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{flat}}$ が**双方向**に成り立ち，領域全体が $\mathcal{F}_m = 1$ の一つの相

閉じたフラックスループ + 局所復号 $\Rightarrow$ 対称性を超えた熱的相の不変量。第三部でこの描像を定理にする。

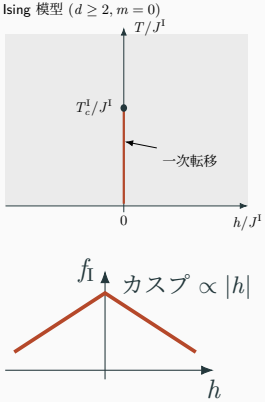
第三部：m-セル上の古典 $\mathbb{Z}_2$ 模型 — 対称性なしの安定性

Ising 模型の教訓

$d \geq 2$ 次元格子上の強磁性 Ising 模型，$\sigma_i = \pm 1$：

$$H_{\mathrm{I}} = -J^{\mathrm{I}} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i, \qquad J^{\mathrm{I}} > 0$$

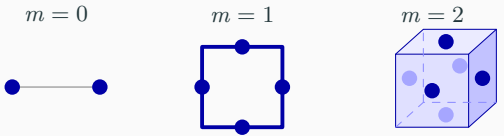
- $h = 0$ のカスプ：$T < T_c^{\mathrm{I}}$ で $f_{\mathrm{I}}(T,h) = f_{\mathrm{I}}(T,0) - m_{\mathrm{sp}}(T)|h| + o(|h|)$ — 一次転移線
- 秩序相は $\mathbb{Z}_2$ 対称性に保護されている
- $h \neq 0$ の任意の磁場は秩序相と無秩序相を滑らかにつなぐ



非自明な熱的相は，**いかなる**対称性の保護もなしに，**任意の**弱い局所摂動に耐え得るか？

Lee & Yang, Phys. Rev. 87, 410 (1952); Friedli & Velenik, *Statistical Mechanics of Lattice Systems* (2017); Ott, arXiv:2003.05879

模型の族：m-セル上のスピン



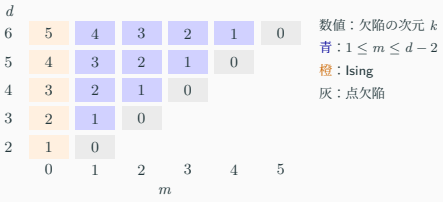
$$B_p \coloneqq \prod_{\ell \in \partial p} Z_\ell, \qquad H_{d,m} \coloneqq -J \sum_{p\,:\,(m+1)\text{-セル}} B_p$$

- 周期的 d 次元立方格子，全ヒルベルト空間，ガウス則なし
- $m = 0$：Ising 模型； $m = 1$：プラケット模型 $=$ トリックコードの磁気セクター； $m = 2$：立方体項
- 欠陥（$B_p = -1$）は双対 $(d - m - 1)$-セル；ビアンキ恒等式によりそれらは**閉じている**：ドメイン壁，ループ，シート，…

二つの要請 $\Rightarrow$ 安定領域 $1 \le m \le d-2$

(i) $m \ge 1$**：非局所的なセクターのラベル。**
フラットセクターは巻き付く m 次元面上のウィルソン積でラベルされ，$(m-1)$-セル上の局所ゲージ反転 η_u によってすべてのセクターは**局所的に区別できない**。$m=0$ では一つのスピンがセクターを読める $\Rightarrow$ Ising のカスプ。

(ii) $k = d-m-1 \ge 1$**：広がった欠陥。**
r 個のセルからなる欠陥のコストは $2Jr$，形状の数は高々指数的 $\Rightarrow$ 低温ではエネルギーが勝つ；小さな成分は**局所的に埋められる**。$m = d-1$ では欠陥は点で，$f = -T[d\log 2 + \log\cosh(J/T)]$ は解析的。



非局所的なセクター + 広がった閉じた欠陥 = 対称性なしの安定性。

摂動と安定性定理

$H_g = H_0 + gV$，$V = \sum_X v_X$：$\|v_X\| \le 1$，台は $\le b$ セル，直径 $\le R$，重なり $\le n_{\mathrm{inc}}$ — **任意の**局所項で，古典でも非可換量子でもよく，対称性は不要（例：$V = -\sum_\ell Z_\ell$）。

定理 1：低温安定性，$1 \le m \le d-2$

ある $B, a, C > 0$ が存在し，自由エネルギー密度 $f(\beta, g)$ は次の領域で (β, g) について同時に実解析的：

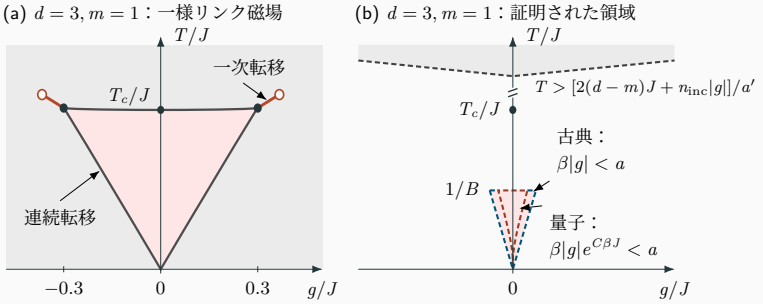
$$\beta J > B,\ \ \beta|g| < a \ \text{（古典）}; \qquad \beta J > B,\ \ \beta|g|\, e^{C\beta J} < a \ \text{（量子）}.$$

定理 2：高温解析性，$0 \le m \le d-1$

$\beta\big[2(d-m)J + n_{\mathrm{inc}}|g|\big] < a'$ ならば f は同時に実解析的；任意の固定した g で $T = \infty$ に達する。

$g = 0$ に Ising 型のカスプはない：低温では自由エネルギーは**あらゆる**摂動方向に正則である。

$(d, m) = (3, 1)$ の十分領域



古典のくさび領域，より狭い量子の窓，$T = \infty$ まで届く高温領域。破線は十分条件であって相境界ではない；白い領域は未解決。

(a): Somoza, Serna, Nahum, PRX 11, 041008 (2021); Bonati, Pelissetto, Vicari, PRB 105, 165138 (2022); Fradkin & Shenker (1979). (b): Sengoku, Cao, H. Watanabe, arXiv:2610.27938

証明の考え方 I：ゲージ平均が任意の摂動を閉じた成分に変える

自由境界の箱の中では，H_0 は局所ゲージ反転 $(\eta\sigma)_\ell = \sigma_\ell \prod_{u\in\partial\ell}\eta_u$ のもとで不変なので，厳密に

$$Z^{\mathrm{o}} = \sum_{\sigma} e^{-\beta H_0^{\mathrm{o}}(\sigma)}\, \mathbb{E}_\eta\, e^{-\beta g V^{\mathrm{o}}(\eta\sigma)} \qquad (V \text{ ではなくボルツマン重みを平均する})$$

- $e^{-\beta g c_X \sigma_X} = \cosh k_X\,(1+\tanh k_X\,\sigma_X)$，$k_X := -\beta g c_X$ と展開：選ばれた各項に因子 $\tanh k_X$
- 平均は境界が打ち消さない選択をすべて消す $\Rightarrow$ **閉じた** m 次元の選択 ξ だけが残り，局所的な箱の中で埋められる（$m \geq 1$）
- 厳密な二種ポリマー表示，SM 式 (S33)：欠陥集合 E と摂動の選択 ξ は**交差の符号**だけで結合する

$$Z^{\mathrm{o}} = e^{-\beta g V_{\mathrm{c}}^{\mathrm{o}}}\, 2^{z_m}\, e^{\beta J N_p} \prod_X \cosh k_X \sum_{\xi\ \text{neutral}} \sum_{E\ \text{closed}} \omega_{\mathrm{e}}(\xi)\,\omega_{\mathrm{f}}(E)\,\chi(\xi,E)$$

$$\omega_{\mathrm{e}}(\xi) = \prod_{X\in\xi}\tanh k_X, \qquad \omega_{\mathrm{f}}(E) = e^{-2\beta J|E|}, \qquad \chi(\xi,E) = \pm 1 \text{ (crossing sign)}$$

$\log Z^{\mathrm{o}}$ のクラスター展開は複素近傍で一様に収束 $\Rightarrow$ 厳密な f の解析性。

任意の対称性を破る重みが，閉じて局所的に埋められる成分になる。

証明の考え方 II：非可換な摂動

積 Z 固有ベクトル $|\sigma\rangle$ に対する対角重みの比。ここで $v_X(u) = e^{u\beta H_0^{\circ}} v_X e^{-u\beta H_0^{\circ}}$：

$$\mathcal{W}_{\beta,g}(\sigma) := e^{\beta H_0^{\circ}(\sigma)} \langle\sigma| e^{-\beta H_g^{\circ}} |\sigma\rangle = \langle\sigma| \mathcal{T} \exp\Big[-\beta g \int_0^1 du \sum_X v_X(u) \Big] |\sigma\rangle$$

- H_0 の各項は互いに可換 $\Rightarrow$ 各 $v_X(u)$ は有界な拡大された台（X とそれに接する B_p の台）に留まり，$\|v_X(u)\| \leq e^{C\beta J}$
- $\log \mathcal{W}$ の連結展開は $\beta|g|e^{C\beta J}$ が小さければ収束：指数的に総和可能な裾をもつ有効**古典**相互作用
- あとは重み付きの評価で古典の議論が適用できる：スペクトルギャップも g の打ち切りも不要
- 高温：$\beta = 0$ のまわりの有限レンジのクラスター展開で，非可換な項にも有効

量子摂動は弱い古典相互作用に帰着する；代償は窓に現れる因子 $e^{C\beta J}$。

Borgs, Kotecký, Ueltschi (1996); Kotecký & Ueltschi (1999); Fröhlich, Rey-Bellet, Ueltschi (2001); Harrow, Mehraban, Soleimanifar (2020)

予想：熱的相分離

予想

すべての $1 \leq m \leq d-2$ とすべての許される V について，低温領域から高温領域へ向かう $T > 0$ の任意の連続な (T, g) 経路は，T と g が同時に変化する場合も含めて，f の熱力学的非解析点を横切る。

- 二つの定理より強い：定理が与えるのは二つの解析的な島であって，その間の壁ではない
- 転移の個数・位置・次数は特定していない
- 動機：二つの領域は**状態**のレベルで局所チャネルにより区別される（次ページ）

両側での解析性 + 異なる値をとるチャネル不変量
$\Rightarrow$ 転移が期待されるが，まだ証明されていない。

ギブス状態の局所チャネル安定性

定理 1：低温での局所チャネル安定性，$1 \le m \le d-2$

$\tilde{B}, \tilde{a}, \tilde{C} > 0$ が存在し，$\beta J > \tilde{B}$，$\beta|g| < \tilde{a}$（V が古典的）または $\beta J > \tilde{B}$，$\beta|g|\, e^{\tilde{C}\beta J} < \tilde{a}$（$V$ がエルミート）ならば

$$\boldsymbol{\rho}_{\beta,g} \;\sim_{\mathrm{LC}}\; \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{flat}}, \qquad \rho_{\mathrm{flat},L} = |\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}|^{-1} \sum_{a\ \mathrm{flat}} |a\rangle\langle a| \text{（全巻き付きセクター）.}$$

各変換：積状態のアンシラ，多重対数的な因果半径，全系トレース誤差 $O(L^{-s})$（任意の固定した $s > 0$）。

定理 2：高温での局所的な準備，$0 \le m \le d-1$

$\tilde{a}' > 0$ が存在し，$\beta\big[2(d-m)J + n_{\mathrm{inc}}|g|\big] < \tilde{a}'$ ならば $\boldsymbol{\rho}_{\beta,g} \sim_{\mathrm{LC}} \boldsymbol{\rho}_{\infty} = 2^{-n} I$（同じ保証つき）。

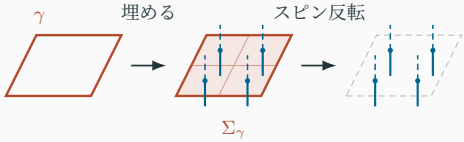
- $g = 0$ とすれば $\boldsymbol{\rho}_{\beta,0} \sim_{\mathrm{LC}} \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{flat}}$；変換を合成して，同じ温度で $\boldsymbol{\rho}_{\beta,g} \sim_{\mathrm{LC}} \boldsymbol{\rho}_{\beta,0}$
- H_g のギャップは仮定しない；弱く結合した物理的な補助系も目標状態に含められる

摂動されたギブス状態は，局所操作を除いて正準フラット集団**そのもの**である — 双方向に。

証明の考え方 I：構成



1. ゲージ平均 $\leftrightarrow$ 条件付き軌道サンプリング
2. 平均化分布 $=$ 弱く相互作用する**閉じた欠陥気体**
3. 復号：小さな成分を局所的に埋める
   （Peierls：$\Pr[|\gamma| \geq a_0 \log L] = O(L^{-s})$）
4. 符号化：局所的なコインから希薄な成分を抽出
5. 量子的な V：位相緩和 $\leftrightarrow$ 局所チャネルによるコヒーレンスの復元（次のスライド）



フラックスループ γ を双対面 Σ_γ で埋める；
貫くリンクを反転するとちょうど γ が消える

Xun, Cao, H. Watanabe, arXiv:2610.27939; Bravyi & Hastings, CMP 307, 609 (2011); Bachmann, Michalakis, Nachtergaele, Sims, CMP 309, 835 (2012); Haah, Hastings, Kothari, Low (2021)

証明の考え方 II：変換チャネルを式で

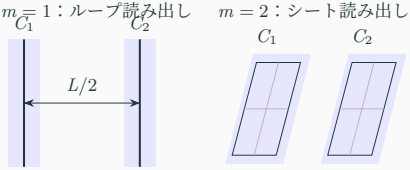
1. **ゲージ平均とその逆**：$w_F(a) \coloneqq 2^{-n_{m-1}} \sum_{\widehat{\eta}} e^{F(a \oplus \delta\widehat{\eta})}$，$F \coloneqq -\beta g V$；逆操作は $Q_a(\widehat{\eta}) = e^{F(a\oplus\delta\widehat{\eta})}/[2^{n_{m-1}} w_F(a)]$ を局所熱浴更新でサンプルする
2. **閉じた欠陥気体**：$\log w_F(a) = c_L - U(E(a)) + r_L(a)$，$U$ の局所強度は高々 $C\beta|g|$ で裾は指数的，$\|r_L\|_\infty \le Cn\beta|g|e^{-cL}$
3. **復号**：$\mathbb{P}(\exists\gamma : |\gamma| \ge r) \le 2Q_L(r)$，$Q_L(r) = n_{m+1} e^{-\tau r}/(1-e^{-\tau})$，$\tau = 2\beta J - 2\log D_{d,m}$；カットオフ $r = \lceil a_0 \log L \rceil \Rightarrow$ 誤差 $O(L^{-s})$
4. **符号化**：挿入率 $b_\gamma(E) = e^{-2\beta J|\gamma| - U_r(E\cup\gamma) + U_r(E)}$ の生成消滅サンプラーが $O(\log L)$ 時間で収束
5. **量子的な** V：位相緩和後の重み $\mathcal{W}_{\beta,g}(a) = e^{\beta H_0(a)} \langle a| e^{-\beta H_g} |a\rangle$（$\lambda = \beta|g| e^{4b(d-m)\beta J}$ が小さい）；コヒーレンスは，ギャップのある親ハミルトニアン $\mathcal{K}_a(t) = \sum_\ell Q_\ell^\dagger Q_\ell$，$Q_\ell = M_t P_\ell(a) M_t^{-1}$ のスペクトル流 $|a\rangle \mapsto |\psi_{1,a}\rangle \propto e^{-\beta H_g/2}|a\rangle$ で復元する

どの段階も積状態の作業レジスタをもつ局所回路：誤差と半径は加算的。

Xun, Cao, H. Watanabe, arXiv:2610.27939; Fernández, Ferrari, Garcia (2002); White, PRL 102, 190601 (2009); Feiguin & Klich (2013); Bravyi & Hastings (2011); Bachmann *et al.* (2012); Haah *et al.* (2021)

不変量 $\mathcal{F}_m$ と相の区別

第二部の $\mathcal{F}$ の高次セル版（3D トリックコードでは $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$；回復操作 $\mathcal{C}$ は読み手 $A_i = \mathcal{C}^\dagger(W_i)$ に吸収する）：κL だけ離れた平行な巻き付き m-トーラス C_1, C_2 の近傍 $R_{i,L}(\zeta)$ 上の二値観測量 $A_i^2 = I$ による二つの読み出し：



$$\mathcal{F}_m(\boldsymbol{\rho}) \coloneqq \lim_{\zeta\downarrow 0} \limsup_{L\to\infty} \sup_{A_i} \left| \langle A_1 A_2 \rangle_\rho - \langle A_1 \rangle_\rho \langle A_2 \rangle_\rho \right|$$

- 一方向の局所変換のもとで非増加，双方向のもとで不変
- フラット集団：$W_{C_1} = W_{C_2}$，$\langle W_{C_i} \rangle = 0 \Rightarrow \mathcal{F}_m = 1$；積状態：$\mathcal{F}_m = 0$
- 相互情報量との関係：$\mathcal{F}_m \le \sqrt{2I(R_1{:}R_2)}$（Pinsker）；$\mathcal{F}_m = 1$ なら $I(R_1{:}R_2) \ge \ln 2$

$$\mathcal{F}_m(\boldsymbol{\rho}_{\beta,g}) = \begin{cases} 1, & \text{低温領域} \\ 0, & \text{高温領域} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{すべての } 1 \le m \le d-2 \text{ と} \\ \text{すべての許される } V \text{ について} \end{array}$$

第三部のまとめ

- Ising 模型（$m = 0$）とトリックコードの磁気セクター（$m = 1$）を含む二状態セル模型の族
- 安定領域 $1 \leq m \leq d - 2$：**非局所的なセクターのラベル + 広がった閉じた欠陥**
- 証明したこと：任意の弱い局所（古典・量子）摂動のもとでの低温での f の同時解析性；高温解析性；両領域での双方向局所チャネル同値；$\mathcal{F}_m$ による両者の区別
- 未解決：鋭い境界，転移の個数と次数，固定した g での $T \to 0$，非可換な論理情報

対称性の保護が**まったくない**安定な非自明熱的相が，$d \geq 3$ のあらゆる次元で存在する。

結論

まとめ

	スピンアイス／高密度氷	磁場中の 3D トリックコード	$\mathbb{Z}_2$ セル模型，$1 \le m \le d-2$
欠陥の制約	エネルギー的なアイスルール	ビアンキ恒等式	ビアンキ恒等式
ループは切れるか	**切れる**（モノポール）	**切れない**	**切れない**
セクターのラベル	大域フラックス（$T > 0$ で消失）	巻き付きウィルソンループ	ウィルソン m 次元面
$T > 0$ での運命	クロスオーバー	$\mathcal{F} = 1$ の領域（QMC）	証明された安定な窓
分類	対称性で十分	対称性を超える	対称性を超える

$T > 0$ で対称性の破れを超えるもの：有界領域からは読めない**非局所的なセクターのラベル**を，局所操作で掃除できる**閉じた広がった欠陥**が担う。

展望

- **熱的相分離**：二つの解析的領域を隔てる熱力学的特異点の証明
- **鋭い境界**：$\mathcal{F}$ はどこで跳ぶか？ チャネル相と自由エネルギー解析性の関係
- **実験**：3D トリックコードとその熱的相の実験的実現
- **その先**：他の有限温度トポロジカル相の探索

ご清聴ありがとうございました

I. S. Watanabe, Y. Motome, H. Watanabe, PRB 114, 094108 (2026); PRL in print (arXiv:2603.03852); PRX 16, 041016 (2026); JPSJ 95, 085002 (2026)

II. H. Watanabe, arXiv:2607.00134

III. S. Sengoku, W. Cao, H. Watanabe, arXiv:2610.27938; G. Xun, W. Cao, H. Watanabe, arXiv:2610.27939